

## Números enteros

1.33. **Calcula:**

a)  $14 + (-8)$

b)  $-3 - 20$

c)  $-8 + 8$

a)  $14 + (-8) = +6$

b)  $-3 - 20 = -23$

c)  $-8 + 8 = 0$

d)  $16 - (-1)$

e)  $-7 + (-3)$

f)  $16 + (-18)$

d)  $16 - (-1) = 17$

e)  $-7 + (-3) = -10$

f)  $16 + (-18) = 34$

g)  $-5 - 5$

h)  $-15 - (-5)$

i)  $9 - (-15)$

g)  $-5 - 5 = -10$

h)  $-15 - (-5) = -10$

i)  $9 - (-15) = 24$

1.34. **Realiza de dos formas distintas:**

a)  $3 + (-9) + 4$

b)  $-4 + (-3) - (-2)$

Aplicando la propiedad asociativa:

a)  $[3 + (-9)] + 4 = -6 + 4 = -2$

b)  $3 + [(-9) + 4] = 3 + (-5) = -2$

b)  $[-4 + (-3)] - (-2) = -7 - (-2) = -5$

a)  $-4 + [(-3) - (-2)] = -4 + (-1) = -5$

1.35. **Halla el resultado de:**

a)  $18 - 7 - 12$

b)  $9 + 6 - 24$

c)  $11 + 3 - 7$

a)  $18 - 7 - 12 = -1$

b)  $9 + 6 - 24 = -9$

c)  $11 + 3 - 7 = 7$

d)  $-4 - 9 - 2 + 15$

e)  $-10 - 8 + 6 + 19$

f)  $14 - 5 + 4 - 13$

d)  $-4 - 9 - 2 + 15 = 0$

e)  $-10 - 8 + 6 + 19 = +7$

f)  $14 - 5 + 4 - 13 = 0$

1.36. **Un buceador desciende 2 metros; luego 1 metro más y por último otros 4 metros. ¿A qué profundidad se encuentra en ese momento?**

$$-2 + (-1) + (-4) = -7$$

Se encuentra a 7 metros de profundidad.

1.37. **Un alpinista escaló 50 metros un día. Al día siguiente llovía y decidió descender 15 metros para protegerse en una cueva. ¿A qué altitud se encuentra la cueva?**

1.º Sube 50 m:  $+50$ .

2.º Baja 15 m:  $-15$ .

La cueva se encuentra a:  $-50 + (-15) = 35$  m.

1.38. **Actividad resuelta.**

1.39. **Calcula:**

a)  $8 \cdot 9$

b)  $-2 \cdot 12$

c)  $-4 \cdot (-7)$

a)  $8 \cdot 9 = +72$

b)  $-2 \cdot 12 = -24$

c)  $-4 \cdot (-7) = +28$

d)  $6 \cdot (-5) \cdot 3$

e)  $-2 \cdot (-10) \cdot (-1)$

f)  $-4 \cdot 8 \cdot (-2)$

d)  $6 \cdot (-5) \cdot 3 = -90$

e)  $-2 \cdot (-10) \cdot (-1) = -20$

f)  $-4 \cdot 8 \cdot (-2) = 64$

**1.40. Halla el resultado de las siguientes divisiones exactas:**

- |                      |                             |
|----------------------|-----------------------------|
| a) $-36 : 4$         | d) $9 : (-1)$               |
| b) $16 : (-2)$       | e) $-45 : (-3) : (-5)$      |
| c) $-15 : (-5)$      | f) $100 : 10 : (-2)$        |
| a) $-36 : 4 = -9$    | d) $9 : (-1) = -9$          |
| b) $16 : (-2) = -8$  | e) $-45 : (-3) : (-5) = -3$ |
| c) $-15 : (-5) = +3$ | f) $100 : 10 : (-2) = -5$   |

**1.41. Comprueba que se cumplen las siguientes igualdades:**

- a)  $[(-5) \cdot 8] \cdot (-4) = (-5) \cdot [8 \cdot (-4)]$   
 b)  $1 \cdot (-4) \cdot 3 = 3 \cdot (-4)$   
 c)  $(-5) [2 \cdot 8] = [2 \cdot 8] \cdot (-5) = 2 \cdot [8 \cdot (-5)]$

¿Qué propiedades se reflejan en ellas?

- a)  $[(-5) \cdot 8] \cdot (-4) = -40 \cdot (-4) = 160$   
 $(-5) \cdot [8 \cdot (-4)] = -5 \cdot (-32) = 160$

Es la propiedad asociativa del producto de números enteros.

- b)  $1 \cdot (-4) \cdot 3 = 3 \cdot (-4)$   
 $1 \cdot (-4) \cdot 3 = -4 \cdot 3 = -12$   
 $3 \cdot (-4) = -12$

Se utilizan el elemento neutro y la propiedad conmutativa de la multiplicación de enteros.

- c)  $(-5) \cdot [2 \cdot 8] = [2 \cdot 8] \cdot (-5) = 2 \cdot [8 \cdot (-5)]$   
 $(-5) \cdot [2 \cdot 8] = (-5) \cdot 16 = -80$   
 $[2 \cdot 8] \cdot (-5) = 16 \cdot (-5) = -80$   
 $2 \cdot [8 \cdot (-5)] = 2 \cdot (-40) = -80$

En la primera igualdad se utiliza la propiedad conmutativa de la multiplicación de enteros, y en la segunda, la propiedad asociativa.

**1.42. Utilizando la propiedad distributiva, calcula:**

- |                          |                        |
|--------------------------|------------------------|
| a) $3 \cdot (-5 + 2)$    | c) $-5 \cdot (9 + 1)$  |
| b) $-4 \cdot [7 + (-1)]$ | d) $-6 \cdot (-3 + 5)$ |
- a)  $3 \cdot (-5 + 2) = 3 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 = -15 + 6 = -9$   
 b)  $-4 \cdot [7 + (-1)] = -4 \cdot 7 + (-4) \cdot (-1) = -28 + 4 = -24$   
 c)  $-5 \cdot (9 + 1) = -5 \cdot 9 + (-5) \cdot 1 = -45 + (-5) = -50$   
 d)  $-6 \cdot (-3 + 5) = -6 \cdot (-3) + (-6) \cdot 5 = 18 + (-30) = -12$

**1.43. Extrae factor común en las siguientes expresiones y calcula:**

- |                                  |                            |
|----------------------------------|----------------------------|
| a) $(-3) \cdot 5 + (-3) \cdot 2$ | c) $4 \cdot 3 + 2 \cdot 7$ |
| b) $2 \cdot 3 + (-5) \cdot (-2)$ | d) $-15 + 45$              |
- a)  $(-3) \cdot 5 + (-3) \cdot 2 = -3 \cdot (5 + 2)$   
 b)  $2 \cdot 3 + (-5) \cdot (-2) = 2 \cdot (3 + 5)$   
 c)  $4 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 2 \cdot (6 + 7)$   
 d)  $-15 + 45 = 15 \cdot (-1 + 3)$

1.44. Copia y completa en tu cuaderno con los números adecuados las siguientes igualdades:

a)  $50 : (-2) : 5 = \square : \square = -5$

d)  $2 \cdot (\square + 3) = -10 + \square = \square$

b)  $6 \cdot (-4) \cdot \square = 24$

e)  $-4 \cdot 5 + (-4) \cdot (-1) = \square \cdot (5 + \square)$

c)  $-81 : \square : (-3) = \square : (-3) = -1$

a)  $50 : (-2) : 5 = -25 : 5 = -5$

b)  $6 \cdot (-4) \cdot (-1) = 24$

c) Hay varias opciones:

$-81 : 9 : (-3) = -9 : (-3) = 3$

$-81 : -9 : (-3) = 9 : (-3) = -3$

$-81 : 3 : (-3) = -27 : (-3) = 9$

$-81 : -3 : (-3) = 27 : (-3) = -9$

d)  $2 \cdot (-5 + 3) = -10 + 15 = -5$

e)  $-4 \cdot 5 + (-4) \cdot (-1) = -4 \cdot (5 + (-1))$

1.45. Halla el resultado de las siguientes operaciones sin paréntesis:

a)  $-6 + 5 \cdot (-7) - (-27) : 3$

e)  $2 - (-3) \cdot 5 + 30 : (-3) : (-2)$

b)  $18 : (-2) : 9 + (-4) \cdot 2 \cdot 5$

f)  $7 + 12 : (-6) : 2 - (-3) \cdot (-1) \cdot 4$

c)  $-3 \cdot 9 - 26 : (-2) + 14 : 7 \cdot (-2)$

g)  $4 \cdot (-7) : (-2) + 18 : (-3) \cdot 6 - 9 \cdot (-8)$

d)  $16 : (-4) + 8 : 2 \cdot (-3) - 12$

h)  $81 : (-9) \cdot 3 - 6 \cdot (-2) \cdot 4 - 36 : 2 : 6$

a)  $-6 + 5 \cdot (-7) - (-27) : 3 = -6 - 35 + 9 = -32$

b)  $18 : (-2) : 9 + (-4) \cdot 2 \cdot 5 = -9 : 9 - 40 = -1 - 40 = -41$

c)  $-3 \cdot 9 - 26 : (-2) + 14 : 7 \cdot (-2) = -27 + 13 + 2 \cdot (-2) = -27 + 13 - 4 = -18$

d)  $16 : (-4) + 8 : 2 \cdot (-3) - 12 = -4 + 4 \cdot (-3) - 12 = -4 - 12 - 12 = -28$

e)  $2 - (-3) \cdot 5 + 30 : (-3) : (-2) = 2 + 15 - 10 : (-2) = 17 + 5 = 22$

f)  $7 + 12 : (-6) : 2 - (-3) \cdot (-1) \cdot 4 = 7 - 2 : 2 - 12 = 7 - 1 - 12 = -6$

g)  $4 \cdot (-7) : (-2) + 18 : (-3) \cdot 6 - 9 \cdot (-8) = -28 : (-2) - 6 \cdot 6 + 72 = 14 - 36 + 72 = 50$

h)  $81 : (-9) \cdot 3 - 6 \cdot (-2) \cdot 4 - 36 : 2 : 6 = -9 \cdot 3 + 48 - 18 : 6 = -27 + 48 - 3 = 18$

1.46. Calcula:

a)  $9 \cdot (5 - 8) - 2$

d)  $4 - (3 \cdot 5) - 8 + 7$

b)  $-7 - 4 : (11 - 9)$

e)  $-10 + 15 : 3 - (13 - 8)$

c)  $(12 + 6 + 8) - 20 : 2$

f)  $28 : 4 : 7 - (7 - 6)$

a)  $9 \cdot (5 - 8) - 2 = 9 \cdot (-3) - 2 = -27 - 2 = -29$

b)  $-7 - 4 : (11 - 9) = -7 - 4 : 2 = -7 - 2 = -9$

c)  $(12 + 6 + 8) - 20 : 2 = 26 - 10 = 16$

d)  $4 - (3 \cdot 5) - 8 + 7 = 4 - 15 - 8 + 7 = 11 - 23 = -12$

e)  $-10 + 15 : 3 - (13 - 8) = -10 + 5 - 5 = -10$

f)  $28 : 4 : 7 - (7 - 6) = 7 : 7 - 1 = 1 - 1 = 0$

1.47. Razona si son correctas o no las siguientes igualdades.

a)  $2 + 4 \cdot 5 + 9 = 6 \cdot 5 + 9$

b)  $7 - 3 \cdot (5 - 6) = 4 \cdot (-1)$

- a) No es correcta porque primero se ha hecho la suma  $2 + 4$ , y se debe hacer antes la multiplicación  $4 \cdot 5$ .  
 b) No es correcta porque después de hacer el paréntesis hay que multiplicar este resultado por 3, y se ha realizado la resta  $7 - 3$ .

1.48. Calcula:

a)  $3 + 2 [6 : (-3) - 1] - [5 + 3 \cdot (-2)]$

b)  $-7 - [15 : (-1 + 4) - 2]$

c)  $70 : [(-5) \cdot 7] - 8 \cdot [(-2) + 6]$

d)  $-2 \cdot [(9 - 6) \cdot 5 + 3] - (4 - 2 \cdot 5) \cdot (6 - 3)$

e)  $(-8 + 2) \cdot (-6) : 4 \cdot 9 - 75 : (9 - 4) \cdot (-1)$

f)  $20 : (-3 - 1) \cdot 7 + 3 \cdot (6 \cdot 4 - 12 : 3)$

g)  $9 - [6 \cdot (4 - 2 \cdot 5) - (7 - 2)]$

h)  $8 + 2 \cdot 7 - (13 - 15) \cdot (12 - 4 \cdot 2)$

a)  $3 + 2[6 : (-3) - 1] - [5 + 3 \cdot (-2)] = 3 + 2(-2 - 1) - (5 - 6) = 3 - 6 + 1 = -2$

b)  $-7 - [15 : (-1 + 4) - 2] = -7 - (15 : 3 - 2) = -7 - 3 = -10$

c)  $70 : [(-5) \cdot 7] - 8 \cdot [(-2) + 6] = 70 : (-35) - 8 \cdot 4 = -2 - 32 = -34$

d)  $-2 \cdot [(9 - 6) \cdot 5 + 3] - (4 - 2 \cdot 5) \cdot (6 - 3) = -2 \cdot (3 \cdot 5 + 3) - (4 - 10) \cdot 3 = -2 \cdot 18 - (-6) \cdot 3 = -36 + 18 = -18$

e)  $(-8 + 2) \cdot (-6) : 4 \cdot 9 - 75 : (9 - 4) \cdot (-1) = -6 \cdot (-6) : 4 \cdot 9 - 75 : 5 \cdot (-1) = 36 : 4 \cdot 9 - 15 \cdot (-1) = 9 + 15 = 24$

f)  $20 : (-3 - 1) \cdot 7 + 3 \cdot (6 \cdot 4 - 12 : 3) = 20 : (-4) \cdot 7 + 3 \cdot (24 - 4) = -5 \cdot 7 + 3 \cdot 20 = -35 + 60 = 25$

g)  $9 - [6 \cdot (4 - 2 \cdot 5) - (7 - 2)] = 9 - [6 \cdot (-6) - 5] = 9 - (-36 - 5) = 9 + 41 = 50$

h)  $8 + 2 \cdot 7 - (13 - 15) \cdot (12 - 4 \cdot 2) = 8 + 14 - (-2) \cdot (12 - 8) = 8 + 14 + 8 = 30$

1.49. En algunas de las siguientes operaciones no son necesarios los paréntesis. ¿En cuáles?

a)  $(6 : 3) : (-2) \cdot 4$

d)  $(-4 + 9) \cdot 3$

b)  $-7 \cdot (-18 : 6)$

e)  $[10 \cdot (-2)] : 4$

c)  $12 - (4 \cdot 9)$

f)  $36 : (-12 : 2)$

No son necesarios en a, c y d porque las operaciones se realizarían en el mismo orden que están puestos los paréntesis.

1.50. Escribe los paréntesis necesarios para que las igualdades sean ciertas.

a)  $4 - 9 \cdot 6 : 10 = -3$

c)  $2 \cdot 11 - 4 \cdot 3 = -2$

b)  $18 : 5 - 2 + 7 = 13$

d)  $16 : 4 - 8 \cdot 2 = -8$

a)  $(4 - 9) \cdot 6 : 10 = -3$

b)  $18 : (5 - 2) + 7 = 13$

c)  $2 \cdot (11 - 4 \cdot 3) = -2$

d)  $(16 : 4 - 8) \cdot 2 = -8$

## EJERCICIOS

## Múltiplos y divisores

1.51. Escribe 5 múltiplos de cada uno de los números.

- |                          |       |       |       |
|--------------------------|-------|-------|-------|
| a) 35                    | b) 19 | c) 40 | d) 22 |
| a) 35, 70, 105, 140, 175 |       |       |       |
| b) 19, 36, 57, 76, 95    |       |       |       |
| c) 40, 80, 120, 160, 200 |       |       |       |
| d) 22, 44, 66, 88, 110   |       |       |       |

1.52. Halla todos los divisores de:

- |   |       |       |        |
|---|-------|-------|--------|
| a) 28                                       | c) 63 | e) 18 | g) 91  |
| b) 150                                      | d) 24 | f) 60 | h) 100 |
| a) 1, 2, 4, 7, 14, 28                       |       |       |        |
| b) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 75, 150   |       |       |        |
| c) 1, 3, 7, 9, 31, 63                       |       |       |        |
| d) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24                 |       |       |        |
| e) 1, 2, 3, 6, 9, 18                        |       |       |        |
| f) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 |       |       |        |
| g) 1, 91                                    |       |       |        |
| h) 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100          |       |       |        |

1.53. Responde a las siguientes preguntas, razonando tu respuesta.

- ¿Es 45 múltiplo de 405?
  - ¿Es 32 múltiplo de 80?
  - ¿Es 18 divisor de 9?
  - ¿Es 24 divisor de 144?
- No, porque no se puede obtener multiplicando 405 por un número natural.
  - No, porque no se puede obtener multiplicando 80 por un número natural.
  - No, porque la división de 9 entre 18 no es exacta.
  - Sí, porque la división de 144 entre 24 es exacta.





1.60. Halla el valor de  $a$  para que el número  $243a$  sea:

- a) Divisible por 3, pero no por 5.
- b) Divisible por 2, pero no por 3.
- c) Divisible por 11.
- a) La suma de las cifras debe ser múltiplo de 3 y, a la vez,  $a$  no puede ser ni 0 ni 5. Como la suma de las cifras es  $9 + a$ , para que sea múltiplo de 3,  $a$  debe ser 3, 6 o 9.
- b) Para que sea divisible por 2,  $a$  debe ser 0 o un par. Y para que no sea múltiplo de 3, la suma de las cifras no debe serlo. Entonces,  $a$  debe ser 0, 2, 4 u 8.
- c) Para que sea divisible por 11, la suma de las cifras pares y de las impares debe resultar en diferencia 0 o un múltiplo de 11. En este caso resultará 0 tomando como  $a$  el valor 1.

1.61. Halla los números cuya descomposición factorial es:

- |                          |                          |                                  |
|--------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| a) $5 \cdot 7^2$         | c) $2^2 \cdot 3^3$       | e) $2 \cdot 5 \cdot 11$          |
| b) $3^3 \cdot 5^2$       | d) $3 \cdot 11^2$        | f) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$       |
| a) $5 \cdot 7^2 = 245$   | c) $2^2 \cdot 3^3 = 108$ | e) $2 \cdot 5 \cdot 11 = 110$    |
| b) $3^3 \cdot 5^2 = 225$ | d) $3 \cdot 11^2 = 363$  | f) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$ |

1.62. Calcula la descomposición en factores primos de:

- |                                  |                                 |                                  |
|----------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| a) 375                           | c) 648                          | e) 700                           |
| b) 1485                          | d) 726                          | f) 1600                          |
| a) $375 = 3 \cdot 5^3$           | c) $648 = 2^3 \cdot 3^4$        | e) $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ |
| b) $1485 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11$ | d) $726 = 2 \cdot 3 \cdot 11^2$ | f) $1600 = 2^6 \cdot 5^2$        |

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

1.63. Calcula el máximo común divisor de:

- |   |                  |                 |
|---|------------------|-----------------|
| a) 45 y 63  | c) 28, 42 y 99   | e) 126, 56 y 84 |
| b) 75 y 625   | d) 60, 300 y 180 | f) 46, 33 y 115 |
| a) $m.c.d.(45, 63) = 32 = 9$                        |                  |                 |
| b) $m.c.d.(75, 625) = 52 = 25$                      |                  |                 |
| c) $m.c.d.(28, 42, 99) = 1$                         |                  |                 |
| d) $m.c.d.(60, 300, 180) = 22 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ |                  |                 |
| e) $m.c.d.(126, 56, 84) = 2 \cdot 7 = 14$           |                  |                 |
| f) $m.c.d.(46, 33, 115) = 1$                        |                  |                 |

1.64. Halla el mínimo común múltiplo de:

- |   |              |              |
|---|--------------|--------------|
| a) 243 y 270  | c) 220 y 189 | e) 375 y 150 |
| b) 72 y 360   | d) 90 y 144  | f) 156 y 95  |
| a) $m.c.m.(243, 270) = 2 \cdot 3^5 \cdot 5 = 2430$                            |              |              |
| b) $m.c.m.(72, 360) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$                            |              |              |
| c) $m.c.m.(220, 189) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 = 9\ 147\ 600$ |              |              |
| d) $m.c.m.(90, 144) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$                            |              |              |
| e) $m.c.m.(375, 150) = 2 \cdot 3 \cdot 5^3 = 750$                             |              |              |
| f) $m.c.m.(156, 95) = 22 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 = 14\ 820$         |              |              |

1.65. El producto del máximo común divisor por el mínimo común múltiplo de dos números es 54432 y uno de los números es 216. ¿Cuál es el otro?

$$A \cdot B = \text{m.c.d.}(A, B) \cdot \text{m.c.m.}(A, B)$$

$$216 \cdot B = 54\,432 \Rightarrow B = 252 \text{ es el otro número.}$$

1.66. El máximo común divisor de dos números es 92 y el producto de esos números, 57684. Calcula el mínimo común múltiplo.

$$A \cdot B = \text{m.c.d.}(A, B) \cdot \text{m.c.m.}(A, B)$$

$$57\,684 = 92 \cdot \text{m.c.m.}(A, B) \Rightarrow \text{m.c.m.}(A, B) = 57\,684 : 92 = 627$$

1.67. Si el producto de dos números coincide con el mínimo común múltiplo de los mismos, ¿cuánto vale su máximo común divisor? ¿Qué relación existe entre esos números?

$$\text{Teniendo en cuenta que } A \cdot B = \text{m.c.d.}(A, B) \cdot \text{m.c.m.}(A, B)$$

$$\text{y que } A \cdot B = \text{m.c.m.}(A, B)$$

$$\text{se obtiene } \text{m.c.d.}(A, B) = 1.$$

### Números enteros

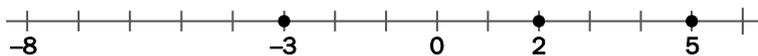
1.68. Expresa con números enteros las siguientes situaciones.

- a) Gastar 6 euros.
- b) Estar a 18 grados de temperatura.
- c) Estar a 150 metros sobre el nivel del mar.
- d) Conseguir 24 puntos en un juego.
- e) Estar en el tercer sótano.

- a) -6
- b) +18
- c) +150
- d) +24
- e) -3

1.69. Representa en la recta real los números.

- a) -3
- b) 5
- c) 2
- d) -8



1.70. Ordena de menor a mayor.

- a) -7, -9, 1, 3, 8
- b) 4, 6, 0, -2, -1
- a)  $-9 < -7 < 1 < 3 < 8$
- b)  $-2 < -1 < 0 < 4 < 6$
- c) -5, 9, -6, -8
- d) 3, -4, 1, 0, 2
- c)  $-8 < -6 < -5 < 9$
- d)  $-4 < 0 < 1 < 2 < 3$

1.71. Escribe el símbolo  $<$  o  $>$  entre los números siguientes.

- |             |               |
|-------------|---------------|
| a) 6 y -5   | d) 3 y 0      |
| b) 7 y 18   | e) -12 y -4   |
| c) -9 y 0   | f) -6 y 15    |
| a) $6 > -5$ | d) $3 > 0$    |
| b) $7 < 18$ | e) $-12 < -4$ |
| c) $-9 < 0$ | f) $-6 < 15$  |

1.72. Halla el opuesto y el valor absoluto de los números.

- |                          |              |       |        |
|--------------------------|--------------|-------|--------|
| a) 14                    | b) -32       | c) 22 | d) -15 |
| a) $\text{op}(14) = -14$ | $ 14  = 14$  |       |        |
| b) $\text{op}(-32) = 32$ | $ -32  = 32$ |       |        |
| c) $\text{op}(22) = 22$  | $ 22  = 22$  |       |        |
| d) $\text{op}(-15) = 15$ | $ -15  = 15$ |       |        |

1.73. Calcula:

- |   |  |
|---|--|
| a) $ \text{op}(-13) $                           | d) $-\text{op} -8 $                    |
| b) $\text{op}[\text{op}(-5)]$                   | e) $ \text{op} 7  $                    |
| c) $ \text{op}(4)  + \text{op}(-2)$             | f) $\text{op}(-6) +  -9 $              |
| a) $ \text{op}(-13)  = 13$                      | d) $-\text{op} -8  = 8$                |
| b) $\text{op}[\text{op}(-5)] = -5$              | e) $ \text{op} 7   = 7$                |
| c) $ \text{op}(4)  + \text{op}(-2) = 4 + 2 = 6$ | f) $\text{op}(-6) +  -9  = 6 + 9 = 15$ |

1.74. Escribe todos los números enteros que están entre:

- 8 y su opuesto
  - $\text{op}(10)$  y  $|-4|$
  - 7 y su valor absoluto
  - 9 y el valor absoluto de su opuesto
- 7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
  - 9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3
  - 7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
  - El valor absoluto del opuesto de 9 es 9. No hay ningún número entre 9 y él mismo.

1.75. Copia en tu cuaderno y escribe un número o uno de los símbolos " $<$ " o " $>$ " en los espacios en blanco.

- |                              |                                |
|------------------------------|--------------------------------|
| a) $-7 < \square < -5$       | c) $3 \square 6 < 9$           |
| b) $-2 \square -1 \square 0$ | d) $-1 \square \square < 1$    |
| a) $-7 < -6 < -5$            | c) $3 \leq 6 < 9$              |
| b) $-2 \leq -1 \leq 0$       | d) $-1 \leq \underline{0} < 1$ |

## Operaciones con números enteros

1.76. Haz las siguientes sumas y restas con números enteros.

a)  $2 + 5 - 8$

b)  $18 - 5 + 9 - 3$

c)  $-4 - 7 - 6 + 1$

d)  $3 + 5 - 4 - 2$

a)  $2 + 5 - 8 = -1$

b)  $18 - 5 + 9 - 3 = 19$

c)  $-4 - 7 - 6 + 1 = -16$

d)  $3 + 5 - 4 - 2 = 2$

e)  $-15 - 3 - 2$

f)  $-6 + 8 + 2 - 1$

g)  $7 + 6 + 3 - 12$

h)  $9 - 1 - 8$

e)  $-15 - 3 - 2 = -20$

f)  $-6 + 8 + 2 - 1 = 3$

g)  $7 + 6 + 3 - 12 = 4$

h)  $9 - 1 - 8 = 0$

1.77. Halla el resultado de las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a)  $7 \cdot (-2) \cdot 5$

b)  $-4 \cdot 8 \cdot 3$

c)  $-2 \cdot (-6) \cdot (-5)$

a)  $7 \cdot (-2) \cdot 5 = -70$

b)  $-4 \cdot 8 \cdot 3 = -96$

c)  $-2 \cdot (-6) \cdot (-5) = -120$

d)  $-81 : 3 : (-9)$

e)  $12 \cdot (-3) : (-6)$

f)  $50 : (-2) : (-5)$

d)  $-81 : 3 : (-9) = 3$

e)  $12 \cdot (-3) : (-6) = 6$

f)  $50 : (-2) : (-5) = 5$

1.78. a) Qué número hay que sumar a 7 para obtener  $-4$ ? ¿Y a  $-2$  para que dé 12?

b) ¿Qué número hay que restar a 0 para que dé 3? ¿Y a 3 para obtener  $-9$ ?

a)  $-11, 14$

b)  $-3, 12$

1.79. a) ¿Por qué número hay que multiplicar  $-9$  para que dé 63? ¿Y para obtener  $-36$ ?

b) ¿Qué número dividido entre 5 da  $-2$ ?

c) ¿Por qué número hay que dividir 24 para obtener  $-8$ ?

a)  $-7, 4$

b)  $-10$

c)  $-3$

1.80. Realiza de dos formas distintas.

- |                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| a) $5(2 + 7)$   | c) $-5(10 - 7)$ |
| b) $-4(-8 + 3)$ | d) $2(-6 + 9)$  |
- a)  $5(2 + 7) = 5 \cdot 9 = 45$   
 $5(2 + 7) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 7 = 10 + 35 = 45$
- b)  $-4(-8 + 3) = -4 \cdot (-5) = 20$   
 $-4(-8 + 3) = -4 \cdot (-8) + (-4) \cdot 3 = 32 - 12 = 20$
- c)  $2(-6 + 9) = 2 \cdot 3 = 6$   
 $2(-6 + 9) = 2 \cdot (-6) + 2 \cdot 9 = -12 + 18 = 6$
- d)  $-5(10 - 7) = -5 \cdot 3 = -15$   
 $-5(10 - 7) = -5 \cdot 10 - (-5) \cdot 7 = -50 + 35 = -15$

1.81. Copia en tu cuaderno y completa con los signos adecuados para que las igualdades sean ciertas.

- |                                  |                          |                                    |
|----------------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| a) $+: + \cdot \square = -$      | c) $\square : - : + = -$ | e) $\square \cdot - : \square = +$ |
| b) $- \cdot - \cdot - = \square$ | d) $- : \square : + = +$ | f) $\square : \square \cdot - = -$ |
- a)  $+: + \cdot - = -$   
 b)  $- \cdot - \cdot - = -$   
 c)  $+: - : + = -$   
 d)  $- : - : + = +$   
 e)  $- \cdot - : + = +$  Los signos que faltan se pueden intercambiar: + -  
 f)  $+: + \cdot - = -$  También podrían ser negativos los dos signos que faltan.

1.82. Extrae factor común en las expresiones siguientes.

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $6 \cdot 3 + 5 \cdot 3$     | c) $4 \cdot 9 - 4 \cdot 6$     |
| b) $-2 \cdot 7 + (-2) \cdot 4$ | d) $-8 \cdot (-3) - 8 \cdot 7$ |
- a)  $6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 3 \cdot (6 + 3)$   
 b)  $-2 \cdot 7 + (-2) \cdot 4 = -2 \cdot (7 + 4)$   
 c)  $4 \cdot 9 - 4 \cdot 6 = 4 \cdot (9 - 6)$   
 d)  $-8 \cdot (-3) - 8 \cdot 7 = -8 \cdot (-3 + 7)$

Operaciones combinadas

1.83. Calcula.

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $5 \cdot (-4) + 18 : 9 \cdot 3$ | d) $-20 : 4 : (-5) + 8 \cdot 3$    |
| b) $6 + 8 : (-2) - 4 \cdot 7$      | e) $7 + 3 \cdot (-12) - 16 : (-8)$ |
| c) $-5 - 15 : (-3) + 9$            |                                    |
- a)  $5 \cdot (-4) + 18 : 9 \cdot 3 = -20 + 6 = -14$   
 b)  $6 + 8 : (-2) - 4 \cdot 7 = 6 - 4 - 28 = -26$   
 c)  $-5 - 15 : (-3) + 9 = -5 + 5 + 9 = 9$   
 d)  $-20 : 4 : (-5) + 8 \cdot 3 = 25 + 24 = 49$   
 e)  $7 + 3 \cdot (-12) - 16 : (-8) = 7 - 36 + 2 = -27$

1.84. Halla el resultado de las operaciones siguientes resolviendo primero los paréntesis.

a)  $5 \cdot (-3 + 6 \cdot 2) - 24 : (-3)$

b)  $8 \cdot (-2 - 1) + 27 : (-5 - 4)$

c)  $-(7 + 2 \cdot 4) - 45 : (-9 + 6)$

d)  $9 \cdot 2 - [6 - 4 \cdot (-3)]$

e)  $(7 - 3) \cdot (4 + 2) - 8 \cdot 3$

a)  $5 \cdot (-3 + 6 \cdot 2) - 24 : (-3) = 5 \cdot 9 + 8 = 45 + 8 = 53$

b)  $8 \cdot (-2 - 1) + 27 : (-5 - 4) = 8 \cdot (-3) + 27 : (-9) = -24 - 3 = -27$

c)  $-(7 + 2 \cdot 4) - 45 : (-9 + 6) = -15 - 45 : (-3) = -15 + 15 = 0$

d)  $9 \cdot 2 - [6 - 4 \cdot (-3)] = 18 - (6 + 12) = 18 - 18 = 0$

e)  $(7 - 3) \cdot (4 + 2) - 8 \cdot 3 = 4 \cdot 6 - 24 = 24 - 24 = 0$

1.85. Realiza las siguientes operaciones combinadas con y sin paréntesis.

a)  $9 : (-2 - 1) - [5 \cdot (3 - 1) - 7 \cdot 4]$

b)  $-3 \cdot [9 + 6 : (-2)] + 5 \cdot 9$

c)  $(-2 \cdot 6 + 9) : 3 + 7 \cdot (-4 + 2)$

d)  $12 : (-4) \cdot 6 - 13 \cdot 8 : (-4)$

e)  $(5 + 18 : (-2) + 3) - [15 : (8 - 5) + 6]$

a)  $9 : (-2 - 1) - [5 \cdot (3 - 1) - 7 \cdot 4] = 9 : (-3) - (10 - 28) = -3 + 18 = 15$

b)  $-3 \cdot [9 + 6 : (-2)] + 5 \cdot 9 = -3 \cdot (9 - 4) + 45 = -15 + 45 = 30$

c)  $(-2 \cdot 6 + 9) : 3 + 7 \cdot (-4 + 2) = -3 - 14 = -17$

d)  $12 : (-4) \cdot 6 - 13 \cdot 8 : (-4) = -18 + 26 = 8$

e)  $(5 + 18 : (-2) + 3) - [15 : (8 - 5) + 6] = -1 - 11 = -12$

1.86. Calcula:

a)  $27 : [9 + 4 \cdot (-3)] - 8 \cdot (6 - 15 : 5)$

b)  $5 \cdot [3 - 2 \cdot (6 + 5) + 4 \cdot 7] - 16 : (-2)$

c)  $7 + 12 : (-4) + 15 \cdot (-1 + 5) : 10$

d)  $8 \cdot (7 + 3) : (-1 - 4) + 36 : 9$

e)  $(15 + 6) : (-7) + 18 : (-5 - 4) - 3 \cdot 2$

f)  $12 + 3 \cdot (-6) - 4 : (-2) \cdot (-9) + 7 \cdot 4$

a)  $27 : [9 + 4 \cdot (-3)] - 8 \cdot (6 - 15 : 5) = 27 : (-3) - 8 \cdot 3 = -9 - 24 = -33$

b)  $5 \cdot [3 - 2 \cdot (6 + 5) + 4 \cdot 7] - 16 : (-2) = 5 \cdot (3 - 2 \cdot 11 + 28) = 5 \cdot (3 - 22 + 28) = 5 \cdot 9 = 45$

c)  $7 + 12 : (-4) + 15 \cdot (-1 + 5) : 10 = 7 - 3 + 60 : 10 = 7 - 3 + 6 = 10$

d)  $8 \cdot (7 + 3) : (-1 - 4) + 36 : 9 = 8 \cdot 10 : (-5) + 4 = 80 : (-5) + 4 = -16 + 4 = -12$

e)  $(15 + 6) : (-7) + 18 : (-5 - 4) - 3 \cdot 2 = 21 : (-7) + 18 : (-9) - 6 = -3 - 2 - 6 = -11$

f)  $12 + 3 \cdot (-6) - 4 : (-2) \cdot (-9) + 7 \cdot 4 = 12 - 18 + 2 \cdot (-9) + 28 = 12 - 18 - 18 + 28 = 4$

## PROBLEMAS

- 1.87. La civilización griega comprende tres períodos: Arcaico, que duró de 776 a 500 a. C.; Clásico, de 500 a 323 a. C., y Helenístico, de 323 a 146 a. C. Expresa con números enteros cada una de las fechas anteriores y calcula después cuánto duró la civilización griega.

Arcaico: de  $-776$  a  $-500$

Clásico: de  $-500$  a  $-323$

Helenístico: de  $-323$  a  $-146$

Duración:  $-146 - (-776) = 630$  años

- 1.88. Juan participó en el juego de subir a la cucaña de las fiestas de su pueblo.

El palo tiene una altura de 6 metros. Subió 3 metros, pero se resbaló y bajó 2; continuó 1 metro, descansó y luego trepó 3 más; volvió a resbalar y cayó 2 metros; y, por fin, en el último tramo, consiguió llegar arriba y coger el premio.

a) ¿Cuántos metros subió en el último tramo?

b) Halla el número de metros totales que recorrió en la cucaña.

c) ¿Cuántos metros más de los que mide el palo recorrió Juan?

a) El número de metros que subió y bajó antes de recorrer el último tramo fue:

$$+3 + (-2) + 1 + 3 + (-2) = 3 \text{ m}$$

En el último tramo subió:  $6 - 3 = 3$  m.

b) En total recorrió:  $|+3| + |-2| + |+1| + |+3| + |-2| = 11$  m.

c)  $11 - 6 = 5$  m más de los que tiene el palo ha recorrido.

- 1.89. Un buceador profesional descendió 40 metros en una primera inmersión. Subió a la superficie para recoger su cámara de fotos y descendió de nuevo 50 metros para hacer unas fotos y luego bajó 20 metros más. Al ascender de nuevo, subió primero 45 metros, y después, el resto.

a) ¿Cuántos metros le quedaban por subir al final?

b) Escribe con números enteros cada uno de los movimientos de descenso y ascenso del buceador.

c) Calcula los metros totales que bajó y subió.

a) Había descendido:  $50 + 20 = 70$  metros.

Le quedan por subir:  $70 - 45 = 25$  metros.

Primera inmersión:  $-40$

b) Sube para recoger la cámara de fotos:  $+40$ .

Desciende de nuevo:  $-50$ .

Y por último desciende otra vez:  $-20$ .

Sube:  $+45$ .

Termina el ascenso:  $+25$ .

c) En total bajó:  $-40 + (-50) + (-20) = -110$ .

En total subió:  $+40 + (+45) + (25) = +110$ .

1.90. En una cuenta de ahorros aparecen los siguientes registros.

Expresa cada cantidad con el entero correspondiente.

Si la cantidad que había antes de estos movimientos era de 3800 euros, ¿cuánto habrá después de ellos?



- a) Debe: -37
- Haber: +250
- Haber: +1364
- Debe: -167

b) Después de estos movimientos habría:  $3800 + (-37) + 250 + 1364 + (-67) = 5210$  €.

1.91. En el transporte de agua con un camión cisterna de 150 litros hasta un poblado africano, se han perdido 54 litros por una grieta muy pequeña que no se había detectado.

- a) Suponiendo que la cantidad de agua perdida hubiera sido la misma en cada kilómetro y sabiendo que el camión recorrió 9 kilómetros, ¿cuántos litros por kilómetro se habrían perdido? Utiliza números enteros para expresar cada una de las cantidades.
- b) Si cada persona recibía 2 litros de agua, ¿cuántas personas se quedarían sin agua?

a)  $-54 : 9 = -6$  Se perdieron 6 litros por kilómetro.

b)  $54 : 2 = 27$  Se quedarían sin agua 27 personas.

1.92. La temperatura de un lugar descendió entre las 22 h y las 4 h del día siguiente 2 °C cada hora.

- a) Utilizando los números enteros, calcula cuántos grados bajó la temperatura en ese tiempo.
- b) Si a las 22 h había 3 °C, ¿qué temperatura había a las 4 h?

a) En total han pasado:  $24 - 22 + 4 - 0 = 6$  horas.

La temperatura en ese tiempo descendió:  $2 \cdot 6 = 12$  grados.

b)  $3 + (-12) = -9$

Había 9 °C bajo cero a las 4 h.

1.93. En un huerto hay plantadas 210 plantas de tomate a lo largo y 100 plantas a lo ancho. Se quiere dividir el huerto en parcelas cuadradas de forma que haya el máximo número de tomates en cada parcela.

a) ¿Cuántas tomates habrá en cada parcela?

b) ¿Cuántas parcelas se conseguirán?

a)  $m.c.d.(210, 100) = 10$

Se harán parcelas cuadradas con 10 tomates en cada lado. Por tanto, habrá 100 tomates en cada parcela.

b) Como hay  $210 \cdot 100 = 21\ 000$  tomates y en cada parcela habrá 100, se conseguirán en total  $21\ 000 : 100 = 210$  parcelas.

- 1.94. Alicia suele ir a la biblioteca de su barrio cada 18 días y Ángel, cada 12. El pasado 8 de junio coincidieron allí. ¿Cuánto tiempo como mínimo ha de pasar para que vuelvan a coincidir otra vez? ¿Qué día será?

Volverán a coincidir cuando el número de días transcurrido coincida con el primer múltiplo común a 18 y 12.

$$\text{m.c.m.}(18, 12) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

Han de pasar como mínimo 36 días para que coincidan de nuevo.

Eso será el 14 de julio.

- 1.95. Se quieren poner en cajas 24 bombones de naranja, 30 de trufa y 36 de almendras de modo que en cada caja halla el mismo número de cada uno de ellos y que se utilice el menor número de cajas.

¿Cuántos bombones hay que poner en cada caja? ¿Cuántas cajas se necesitarán?

Para que el número de cajas sea el menor posible, es necesario poner en cada una de ellas el mayor número de bombones. Este es el m.c.d.(24, 30 y 36).

$$\text{m.c.d.}(24, 30 \text{ y } 36) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ bombones ha de haber en cada caja.}$$

Se necesitarían: 24 : 6 = 4 cajas de bombones de naranja

30 : 6 = 5 cajas de bombones de trufa

36 : 6 = 6 cajas de bombones de almendras

- 1.96. Carlos y Laura son atletas y entrenan todos los días en la pista de un polideportivo. Carlos tarda 2,4 minutos en dar una vuelta completa a la pista y Laura 3 minutos.

Si empiezan su entrenamiento a las 7 de la tarde y toman juntos la salida, ¿a qué hora volverán a juntarse en ese mismo punto?

$$2,4 \text{ min} = 2,4 \cdot 60 = 144 \text{ segundos}$$

$$3 \text{ min} = 3 \cdot 60 = 180 \text{ segundos}$$

Se juntarán por primera vez cuando hayan pasado los segundos que coinciden con el m.c.m.(144, 180).

$$\text{m.c.m.}(144, 180) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720 \text{ s} = 12 \text{ min}$$

Se volverán a juntar después de 12 minutos, a las 7 h 12 min.

- 1.97. Juan tiene un montón de fotos de sus vacaciones. Cuando le preguntas cuántas tiene, te contesta: “Si hago montones de 11 fotos me sobran 5, y si hago montones de 23 me sobran 3”.

¿Cuál es el menor número de fotos que puede tener Juan en total?

Nº de montones	De 11 fotos		De 23 fotos	
	N.º fotos/montón	Total fotos	N.º fotos/montón	Total fotos
1	11	16	23	26
2	22	27	46	49
3	33	38		
4	44	49		

En total puede tener 49 fotos. Si hace montones de 11 fotos, hará 4 y le sobrarán 5, y si los hace de 23, hará 2 y le sobrarán 3.

## AMPLIACIÓN

1.98. ¿Cuántos enteros positivos verifican que su cuadrado es un divisor de 2000?

- a) 2                      b) 6                      c) 10                      d) 12

Como  $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ , los números  $n$  buscados deberán ser de la forma  $n = 2^a \cdot 5^b$ , por lo que su cuadrado será  $2^{2a} \cdot 5^{2b}$ , con lo que  $0 \leq 2a \leq 4$  y  $0 \leq 2b \leq 3$ . Así pues,  $a = 0, 1, 2$ , y  $b = 0, 1$ , habiendo en total, entonces, 6 números con la propiedad pedida, a saber:  $2^0 \cdot 5^0, 2^0 \cdot 5^1, 2^1 \cdot 5^0, 2^1 \cdot 5^1, 2^2 \cdot 5^0$  y  $2^2 \cdot 5^1$ , es decir, 1, 2, 4, 5, 10 y 20. Luego la respuesta correcta es la b: 6.

1.99. Si  $x$  es un número entero, menor que 2, tal que  $|x-2|=p$ , ¿cuál es el valor de  $x-p$ ?

- a) -2                      b) 2                      c)  $2-2p$                       d)  $2p-2$

Al ser  $x < 2$ , es  $|x-2| = 2-x$ , por lo que si  $2-x=p$ ,  $x=2-p$  y  $x-p=2-2p$ .

La respuesta correcta es la c:  $2-2p$ .

1.100. Si la suma de dos números es  $S$  y luego les añadimos 3 a cada uno y posteriormente los doblamos, ¿cuál es la suma de los dos nuevos números?

- a)  $2S+3$                       b)  $3S+6$                       c)  $2S+6$                       d)  $2S+12$

Si  $a+b=S$ ,  $2(a+3)+2(b+3)=2(a+b)+12=2S+12$ . La respuesta correcta es la d:  $2S+12$ .

1.101. Los lados de un triángulo vienen dados por los números 4, 6 y  $x$ , y los de otro triángulo vienen dados por 4, 6 e  $y$ . ¿cuál es el menor número positivo que no puede ser valor de  $|x-y|$ ?

- 2    b)                      4                      c)    6                      d)    8

Al ser lados de un triángulo, tenemos que  $2 < x < 10$ ,  $2 < y < 10$ . Así pues,  $|x-y|$  nunca llegará a ser 8, pero podrá tomar cualquier valor próximo a 8 (menor que 8), con lo que el menor número positivo que no puede ser el valor de  $|x-y|$  es 8. La respuesta correcta es la d: 8.

1.102. El número  $m$  verifica que cada pareja entre 24, 42 y  $m$  tiene el mismo m.c.d., y cada pareja entre 6, 15 y  $m$  tiene el mismo m.c.m. ¿Qué número es  $m$ ?

- 12    b)                      15                      c)    30                      d)    36

Como  $m.c.d.(24, 42) = 6$  y, por ejemplo,  $m.c.d.(24, m) = 6$ ,  $m$  debe ser múltiplo de 6. Por otra parte,  $m.c.m.(6, 15) = 30$  y, por ejemplo,  $m.c.m.(65, m) = 30$ , con lo que  $m$  debe ser un divisor de 30. Así pues, en principio,  $m$  solamente podría tomar los valores 6 y 30, pero  $m$  no puede ser 6, pues nos dicen que, por ejemplo,  $m.c.m.(6, m) = 30$ . La respuesta correcta es la c: 30.

1.103. De los próximos años, ¿cuál es el primero que se podrá escribir como producto de tres enteros consecutivos?

- 2040                      b) 2046                      c) 2052                      d) 2184

Llamando  $a-1$ ,  $a$  y  $a+1$  a los tres enteros consecutivos, debe verificarse que:

$$2011 < (a-1) a (a+1)$$

Así pues,  $a > 12$ , pues para  $a = 12$ ,  $11 \cdot 12 \cdot 13 < 2011$ . Tomando  $a = 13$ , tenemos que  $12 \cdot 13 \cdot 14 > 2011$ , siendo  $12 \cdot 13 \cdot 14 = 2184$ . La respuesta correcta es la d:  $2184 = 12 \cdot 13 \cdot 14$ .

AUTOEVALUACIÓN

1.1. Escribe los 5 primeros múltiplos y todos los divisores de los números siguientes.

- |                                     |                               |       |       |
|-------------------------------------|-------------------------------|-------|-------|
| a) 27                               | b) 31                         | c) 16 | d) 45 |
| a) Múltiplos: 27, 54, 81, 108, 135  | Divisores: 1, 3, 9, 27        |       |       |
| b) Múltiplos: 31, 62, 93, 124, 155  | Divisores: 1, 31              |       |       |
| c) Múltiplos: 16, 32, 48, 64, 80    | Divisores: 1, 2, 4, 8, 16     |       |       |
| d) Múltiplos: 45, 90, 135, 180, 220 | Divisores: 1, 3, 5, 9, 15, 45 |       |       |

1.2. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los números siguientes.

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| a) 48, 64 y 24                     | c) 320, 405 y 210  |
| b) 35, 80 y 105                    | d) 200, 150 y 216  |
| a) m.c.d.(48, 64 y 24) = $2^3 = 8$ | m.c.m.(48, 64 y 24) = $2^6 \cdot 3 = 192$                            |
| b) m.c.d.(35, 80 y 105) = 5        | m.c.m.(35, 80 y 105) = $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1680$          |
| c) m.c.d.(320, 405 y 210) = 5      | m.c.m.(320, 405 y 210) = $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 60\ 480$   |
| d) m.c.d.(200, 150 y 216) = 2      | m.c.m.(200, 150 y 216) = $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 103 = 61\ 800$ |

1.3. Calcula.

- |                                      |                          |
|--------------------------------------|--------------------------|
| a) $\text{op} -7 $                   | c) $ \text{op}(3) $      |
| b) $\text{op}[\text{op}(-12)]$       | d) $-\text{op} -8 $      |
| a) $\text{op} -7  = -7$              | c) $ \text{op}(3)  = 3$  |
| b) $\text{op}[\text{op}(-12)] = -12$ | d) $-\text{op} -8  = -8$ |

1.4. Realiza las sumas y restas de números enteros.

- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $3 - 5 + 16 + (-7)$     | c) $-14 + 8 - 9 - 4$       |
| b) $9 + 7 - 18 - (-5)$     | d) $13 + 8 - 25 + 7$       |
| a) $3 - 5 + 16 + (-7) = 7$ | c) $-14 + 8 - 9 - 4 = -19$ |
| b) $9 + 7 - 18 - (-5) = 3$ | d) $13 + 8 - 25 + 7 = 3$   |

1.5. Halla el resultado de las multiplicaciones y divisiones.

- |                                  |                            |
|----------------------------------|----------------------------|
| a) $7 \cdot (-8) \cdot 2$        | c) $-20 : (-5) : 2$        |
| b) $-63 : (-9) \cdot 3$          | d) $8 \cdot 3 : (-4)$      |
| a) $7 \cdot (-8) \cdot 2 = -112$ | c) $-20 : (-5) : 2 = 2$    |
| b) $-63 : (-9) \cdot 3 = 21$     | d) $8 \cdot 3 : (-4) = -6$ |

1.6. Indica la propiedad que se está aplicando en cada caso y resuelve.

a)  $8 + [(-3) + 9] = [8 + (-3)] + 9$

b)  $-4 \cdot (-6) = -6 \cdot (-4)$

c)  $(7 \cdot 5) \cdot (-2) = 7 \cdot [5 \cdot (-2)]$

d)  $5 \cdot (7 - 4) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot (-4)$

- a) Asociativa de la suma  
 b) Conmutativa del producto  
 c) Asociativa del producto  
 d) Distributiva

1.7. Halla el resultado de las siguientes operaciones:

a)  $(6 + 12) : (-3) - 8 \cdot 4$

b)  $2 \cdot (-8) : 4 + 24 : (-6) + 5$

c)  $(35 - 7) : (-4 - 3) + 3 \cdot (8 - 10)$

d)  $6 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) - [5 + 2 \cdot (3 - 7)]$

e)  $9 \cdot (5 - 7) : (8 - 11) - (6 + 2 \cdot 4)$

a)  $(6 + 12) : (-3) - 8 \cdot 4 = 18 : (-3) - 32 = -6 - 32 = -38$

b)  $2 \cdot (-8) : 4 + 24 : (-6) + 5 = -16 : 4 - 4 + 5 = -4 - 4 + 5 = -3$

c)  $(35 - 7) : (-4 - 3) + 3 \cdot (8 - 10) = 28 : (-7) + 3 \cdot (-2) = -4 + (-6) = -10$

d)  $6 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) - [5 + 2 \cdot (3 - 7)] = 6 + 6 - (5 - 8) = 12 + 3 = 15$

e)  $9 \cdot (5 - 7) : (8 - 11) - (6 + 2 \cdot 4) = 9 \cdot (-2) : (-3) - (6 + 8) = 6 - 14 = -8$

1.8. Se quieren empaquetar en cajas lo más grandes posibles, 36 botes de mermelada de fresa, 45 de naranja y 54 de melocotón, de modo que en cada caja haya el mismo número de botes y no estén mezclados.

¿Cuántos botes habrá en cada caja? ¿Cuántas cajas habrá en total?

$$\text{m.c.d.}(36, 45, 54) = \text{m.c.d.}(2^2 \cdot 3^2, 3^2 \cdot 5, 2 \cdot 3^3) = 3^2 = 9$$

En cada caja habrá 9 botes.

Habrà 4 cajas de botes de mermelada de fresa, 5 de mermelada de naranja y 6 de melocotón.

En total, habrá  $4 + 5 + 6 = 15$  cajas.

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Opera y comprende > Documentación, por favor

El documento nacional de identidad (DNI) se forma con 8 cifras y una letra. Esa letra sirve como código de seguridad, para comprobar que no hay errores, ya que está relacionada con los demás números.

Para obtener la letra correspondiente, se hace la división entera del número entre 23. El resto será un número entre 0 y 22. A cada resto le corresponde una letra, según la siguiente tabla:



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E

1.1. Puedes comprobar que no se usan todas las letras. ¿Por qué?

No se usan las letras que pueden confundirse con números (I, O), con otras letras (U) o que no se usan en otros idiomas (Ñ).

1.2. El número del DNI de Laura es 12345678. ¿Qué letra debe llevar?

Al dividir entre 23, el resto es 14. La letra correspondiente es la Z.

1.3. Laura se equivocó al escribir su DNI y cambió el orden de las dos últimas cifras. ¿Cambiará la letra?

El resto de la división cambia, es 0. La letra es la T.

1.4. La fotocopia del DNI de Pablo no se ve bien; las primeras cifras son 0034560, la última es ilegible y la letra parece una P o una R. Busca los datos que faltan.

La última cifra estará entre 0 y 9. Los alumnos podrían ir probando cada una y ver la letra que corresponde, pero resulta más rápido hacerlo de otra forma. Como el resto de 345600 entre 23 es 2, vemos que podríamos obtener un resto entre  $2 + 0 = 2$  y  $2 + 9 = 11$ , por lo que la letra no puede ser la R. La letra es la P, que corresponde al resto 8, por lo que el número que falta es un 6.

1.5. Para que a dos números les corresponda la misma letra, ¿cómo debe ser su diferencia? Encuentra tres DNI distintos con la misma letra que el de Laura.

Para que al dividir entre 23 se obtenga el mismo resto, los números se deben diferenciar en un múltiplo de 23. Si el DNI de Laura es 12345678, podemos obtener los que queramos sumando o restando múltiplos de 23. Por ejemplo, 12345701, 12345655 o 12345724.

## Calcula y reflexiona > Matrículas

Para las matrículas de los coches de España se utilizaba la estructura siguiente:

XX - 0000 - XX

La primera parte, formada por 1 o 2 letras, era el indicativo provincial, y la última eran 1 o 2 letras de la A a la Z, excluyendo las letras Ñ, Q y R.

Desde el año 2000 se utilizan cuatro cifras y tres letras, que deben ser consonantes distintas de Ñ y Q.



### 1.1. ¿Cuántos números distintos de 4 cifras o menos se pueden formar?

Con cuatro cifras o menos hay 10 000 números, del 0 al 9999.

### 1.2. Vamos a trabajar primero con el sistema antiguo.

a) Como había códigos para 50 provincias y dos más para Ceuta y Melilla, para cada uno de los números de la actividad 1 hay 52 posibilidades. ¿Cuántas matrículas se forman tomando solo el indicativo y el número?

b) Como para la parte final no se usaban las letras Ñ, Q y R, quedaban disponibles 24 letras para los siguientes dos lugares. En el primer lugar hay 24 posibilidades, y en el segundo, 25, ya que se puede dejar en blanco. En total, para cada número del apartado anterior hay  $24 \cdot 25 = 600$  posibilidades. ¿Cuántas matrículas distintas se podían formar en total?

a) 10 000 números por 52 posibilidades hacen un total de 520 000 matrículas.

b) Para cada uno de esos hay 600, que en total son 312 000 000.

### 1.3. Con el sistema actual hay que usar siempre un número de hasta cuatro cifras y un código de tres letras, no se pueden utilizar menos. De la misma forma que antes, calcula el número de matrículas posibles.

Hay 20 consonantes, quitando la Ñ y la Q. El número de matrículas posible será  $10\,000 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20$ , es decir, 80 000 000.

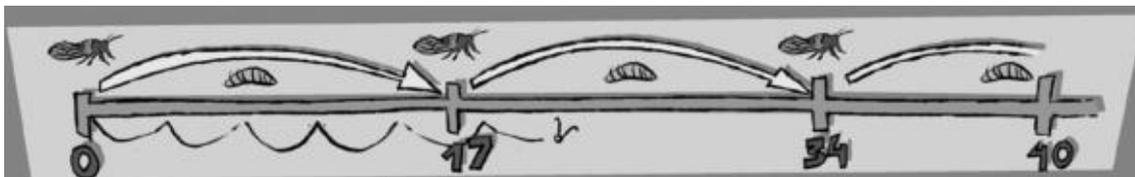
### 1.4. ¿Por qué no se utilizan algunas letras, como las vocales, para las matrículas?

No se usan vocales para evitar que se formen palabras con significado (ETA, FEO, etc.).

## Comprende la naturaleza &gt; La cigarra y el primo

Los números primos no tienen relación con la naturaleza... ¿o sí? En el libro El enigma de Fermat, de S. Singh, se cuenta que unas cigarras tienen un ciclo vital de 17 años (tiempo en el que permanecen ocultas, en estado de larva), al final del ciclo salen en estado adulto, y viven solo un par de semanas más, el tiempo necesario para reproducirse.

¿Por qué el ciclo es tan largo, y además primo? Podría ser un mecanismo defensivo contra algunos parásitos.



- 1.1. Supongamos que la cigarra tuviera un ciclo de 3 años, y su parásito, de 2 años. Si coincidieran este año, ¿cuándo volverían a coincidir?

El mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6, volverían a coincidir dentro de 6 años.

- 1.2. Para defenderse, la cigarra evoluciona a un ciclo de 5 años. ¿Cada cuánto tiempo coincidirían? El parásito intenta adaptarse alargando su ciclo a 3 años. ¿Coincidirán antes? ¿Y si lo alarga a 4 años?

Inicialmente coincidirían cada 10 años, luego cada 15 y luego cada 20.

- 1.3. Si las cigarras irrumpiesen cada 14 años, ¿qué ciclo vital le interesaría tener al parásito?

Interesa un número que sea divisor de 14, lo más alto posible. Por orden: 14, 7, 2 o 1.

- 1.4. Después de un tiempo adaptando sus respectivos períodos, la cigarra llegó a un ciclo vital de 17 años. Si el parásito se despertara cada año, tendría que hacerlo 17 veces antes de volver a coincidir. ¿Y si despertara cada 2? ¿Y si lo hiciera cada 3 años? ¿Y cada 16?

Si despierta cada 2 años, tardarán 34. Si lo hace cada 3, tardarán 51. Si lo hace cada 16, tardarán 272 años.

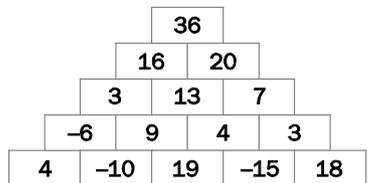
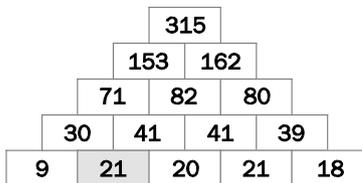
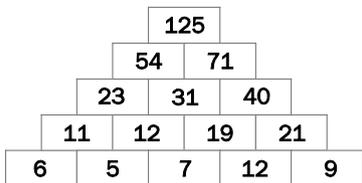
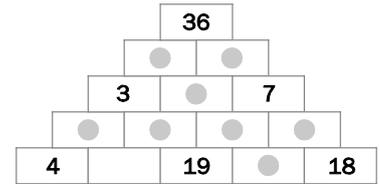
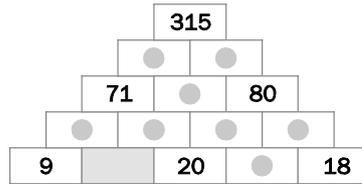
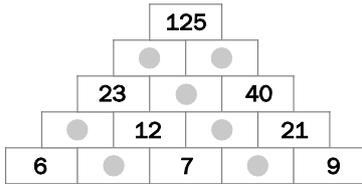
- 1.5. Puedes encontrar más información en [www.e-sm.net/2esoz04](http://www.e-sm.net/2esoz04), donde se explica el resultado de esta adaptación de las cigarras.

Enlace a la web [www.e-sm.net/2esoz04](http://www.e-sm.net/2esoz04).

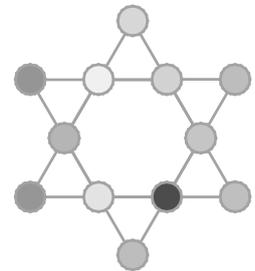
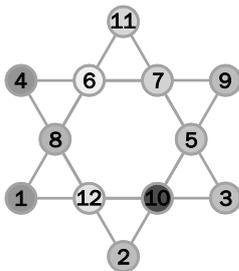
Diviértete con los números > Juegos matemáticos

Hay muchos pasatiempos relacionados con las matemáticas. Uno de los más populares últimamente es el sudoku, aunque en realidad los números que aparecen se podrían sustituir por letras o por otros símbolos, ya que no se realizan operaciones con ellos. no tienen relación con la naturaleza... ¿o sí?

- 1.1. Observa estas pirámides numéricas. Cada casilla es la suma de las dos sobre las que se apoya. La primera es fácil de completar. Para la segunda, puedes empezar deduciendo el número que irá en la celda amarilla, para que al subir aparezca ese 71. Si resuelves estas, podrás completar la tercera, en la que pueden aparecer números enteros negativos.



- 1.2. En el siguiente juego debes completar la estrella de la derecha colocando en los círculos todos los números del 1 al 12, de forma que cada cuatro números que estén en una misma línea sumen 26.



- 1.3. Para finalizar, un truco de magia basado en la divisibilidad. Piensa un número, multiplícalo por 9, tacha la primera cifra y suma las que quedan. Pásale la suma a tu compañero. ¿Será capaz de adivinar la cifra tachada?

El resultado tiene que ser múltiplo de 9, por lo que la suma de sus cifras también deberá serlo. Solo hay que hallar un número que añadido a la suma que nos pasan dé como resultado un múltiplo de 9. El número no puede ser 0, ya que hemos tachado la primera cifra.